



بخش دوم

راه من، راه تو

هر دو یا هیچ کدام؟

● محدثه رجایی

کلیدواژه‌ها: بازی‌های شانس، احتمال،
بازی گلوله‌ها

در قسمت قبل دیدیم که آقای احمدی از دانش‌آموزانش خواسته بود به سؤال زیر پاسخ دهند و قرار شده بود که بحث کلاسی دربارهٔ راه‌حل‌های متفاوت در جلسهٔ بعدی درس انجام شود:

شما اسیر یک قبیلهٔ آدم‌خوار شده‌اید و آن‌ها مجبور تان کرده‌اند در امتحانی چهارگزینه‌ای با چهل سؤال شرکت کنید. این امتحان به زبان بومیان قبیله طراحی شده است و شما معنای هیچ‌یک از کلمات را نمی‌دانید! هر چه تعداد پرسش‌هایی که جواب آن‌ها را درست انتخاب می‌کنید بیشتر باشد، مجازات کمتری در انتظار شماست. چه می‌کنید؟

امید و ایمان در راه خانه دربارهٔ راه‌حل خودشان با هم صحبت کرده بودند. آن‌ها فهمیده بودند که هر راهی برای پر کردن پاسخ‌نامه انتخاب کنند، باز هم ممکن است تعداد جواب‌های درستشان صفر باشد. سؤال امید و ایمان در انتهای بحثشان این بود که: «ویژگی یک راه خوب برای پر کردن پاسخ‌نامه چیست؟» آن‌ها می‌خواستند بدانند چطور باید فهمید که یک راه خاص راه خوبی هست یا نه. در نهایت، قرار شده بود که امید از خواهر بزرگ‌ترش که با بازی‌های شانس آشنایی داشت، کمک بگیرد، بلکه آن‌ها بتوانند دربارهٔ وضعیت‌های وابسته به شانس بهتر فکر کنند. روز بعد، ایمان و امید از هر فرصت مناسبی استفاده کردند تا به مسئله آقای احمدی فکر کنند. حالا ادامهٔ ماجرا را بخوانید:

پیش از برنامهٔ صبحگاه

امید که کمی زودتر به مدرسه آمده بود، ایمان را در حیاط پیدا کرد. کیسه‌ای را که در دست داشت به ایمان نشان داد و گفت: «ایمان، وقتی فکرهایمان دربارهٔ مسئلهٔ آقای احمدی را برای خواهرم گفتم، این کیسه را به من داد و پیشنهاد کرد که به یک بازی شانس فکر کنیم. در این کیسه دو گلولهٔ سیاه و سه گلولهٔ سفید وجود دارد. بازی هم به این شکل است: هر بار یکی از ما یک جفت گلوله از کیسه درمی‌آورد. اگر گلوله‌هایی که خارج می‌شوند هم‌رنگ باشند، یکی از ما یک امتیاز می‌گیرد و اگر یکی سیاه و دیگری سفید باشد، نفر دیگر یک امتیاز می‌گیرد. خواهرم گفت سعی کنیم کشف کنیم که دوست داریم در این بازی کی امتیاز بگیریم؛ اگر گلوله‌ها هم‌رنگ بودند یا اگر رنگشان متفاوت بود.» ایمان پرسید: «یعنی شانس در آوردن گلوله‌های هم‌رنگ با در آوردن گلوله‌های ناهم‌رنگ برابر نیست؟ چه‌طور بفهمیم کدام یک شانس بیشتری دارد؟» امید جواب داد: «نمی‌دانم! شاید هم خواهرم خواسته است بفهمیم که شانس برنده شدن هر دو مان برابر است و فرقی نمی‌کند کی امتیاز بگیریم! اما یک راه ساده برای فهمیدن هست! بیا امتحان کنیم. چند بار تو گلوله در بیاور و چند بار هم من تا ببینم چه اتفاقی می‌افتد.» ایمان دستش را در کیسه کرد و بدون اینکه به داخل آن نگاه کند، دو تا از گلوله‌ها را درآورد. هر دو سیاه بودند. بعد نوبت امید بود که دو گلولهٔ سفید از کیسه بیرون آورد. هر دو دفعه گلوله‌ها هم‌رنگ بودند! امید و ایمان نگاهی به هم کردند و بحثشان به این صورت ادامه پیدا کرد: **ایمان:** درست است که هر دو بار گلوله‌ها هم‌رنگ از آب درآمدند، ولی فکر می‌کنم هنوز اطلاعاتمان خیلی کم است! بالاخره شانس است دیگر!



هر عدد چند بار آمده بود. در آخر دیدیم که تعداد اعداد متفاوت فرق چندانی با هم ندارد. برای همین هم فکر می‌کنم شانس آمدن اعداد متفاوت با هم برابر است.

ایمان: قبول داری که حتی با تاس سالم هم ممکن است که پانصد بار یا حتی هزار بار تاس بریزی و حتی یک بار هم شش نیاوری؟
امید: خب بالاخره ممکن است این اتفاق بیفتد، ولی فکر می‌کنم چنین چیزی خیلی کم پیش می‌آید.

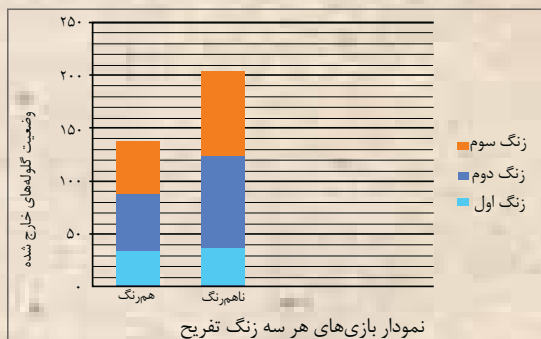
ایمان: موافقی برای جواب دادن به سؤالی که خواهرت پرسیده است، در آوردن گلوله از کیسه را چند بار تکرار کنیم تا ببینیم چه می‌شود؟ به نظرم اگر این کار را بارها و بارها انجام دهیم، می‌توانیم انتظار داشته باشیم حالتی که شانس بیشتری دارد، بیشتر اتفاق بیفتد.

امید: یعنی اگر شانس در آمدن گلوله‌های هم‌رنگ بیشتر باشد، ما هم بیشتر گلوله‌های هم‌رنگ خارج می‌کنیم و اگر شانس در آمدن گلوله‌های ناهم‌رنگ بیشتر باشد، ما هم در آزمایشمان بیشتر وقت‌ها یک گلوله سفید و یک گلوله سیاه از کیسه درمی‌آوریم.



زنگ‌های تفریح

ایمان و امید می‌خواستند در زنگ‌های تفریح تا جایی که می‌توانند بازی کنند. آن‌ها نتیجه هر بار در آوردن گلوله از کیسه را یادداشت می‌کردند. زنگ تفریح اول، در مجموع هفتاد بار گلوله از کیسه خارج کردند که ۳۴ جفت آن‌ها هم‌رنگ بود و ۳۶ جفت آن ناهم‌رنگ. قرار شد که در زنگ تفریح‌های بعدی فقط یک نفر گلوله خارج کند و نفر دیگر نتایج را بنویسد تا سرعتشان بالا برود. نتیجه زنگ تفریح دوم ۵۷ جفت هم‌رنگ و ۸۸ جفت ناهم‌رنگ بود و نتیجه زنگ تفریح سوم ۴۸ جفت هم‌رنگ و ۸۲ جفت ناهم‌رنگ.



سعی کنید از روی نمودار بالا و بدون استفاده از اعداد بالا بگویید:

امید: مثل بازی با تاس. بعضی وقت‌ها پیش می‌آید که وقتی بازی با تاس را شروع می‌کنیم، چند بار پشت سر هم مثلاً شش بیاید. ولی این دلیل نمی‌شود که فکر کنیم شانس آمدن شش بیشتر از بقیه است. برعکس، اعداد متفاوت روی تاس هم‌شانس هستند.

ایمان: چرا این‌طور فکر می‌کنی؟

امید: البته منظورم این است که اگر تاس سالم باشد، شانس همه عددها با هم برابر است. به نظرم اگر تاس سالم باشد، همان قدر که ممکن است شش رو قرار بگیرد، یک هم می‌تواند رو قرار بگیرد، دو، سه، چهار و پنج هم همین‌طور! تازه من یک‌بار هم این مسئله را برای خودم آزمایش کرده‌ام!

ایمان: چه‌طور؟

امید: می‌دانی ایمان؟! یک‌بار با خواهرم یک بازی شانس کردیم که آوردن شش در آن امتیاز مثبت داشت. خواهرم خیلی بیشتر از من شش می‌آورد. من فکر می‌کردم که تاس سالم است و برای همین به خودم شک کرده بودم! فکر می‌کردم شاید من کلاً آدم بدشانسی هستم یا اینکه تاس را بد پرتاب می‌کنم! بعد از بازی تاس را چندین بار برای خودم پرتاب کردم.

ایمان: خب؟!

امید: حدود پانصد بار این کار را کردم و روی کاغذ نوشتم که از



مسیر پیدا کردن جواب سؤال معلمشان را چگونه ادامه دهند:
ایمان: حالا چه کار کنیم؟

امید: من هم راهنما و هم نتیجه‌ای را که به دست آوردیم، برای خواهرم توضیح می‌دهم تا ببینم که چه قدر درست عمل کرده‌ایم.

ایمان: ممنون! الان دو سؤال وجود دارد که می‌توانیم به آن‌ها فکر کنیم: یکی اینکه راه دیگری برای جواب دادن به سؤال خواهرت وجود دارد یا نه. دومی هم اینکه ارتباط بازی گلوله‌ها با پیدا کردن راه خوب برای پر کردن پاسخ‌نامه چیست. هر چه باشد خواهرت بازی گلوله‌ها را برای جواب دادن به مسئله پاسخ‌نامه پیشنهاد کرده بود دیگر!

امید: پس هنوز راه درازی در پیش داریم! فکر کنم کاری که می‌کنیم شبیه کار دانشمندا باشد! منظورم این است که ما یک پرسش اصلی داریم که پیدا کردن راه خوب برای پر کردن پاسخ‌نامه‌ای است که سؤال‌هایش را نمی‌فهمیم. برای جواب دادن به این سؤال چند پرسش ساده‌تر مطرح می‌کنیم و ابتدا به آن‌ها جواب می‌دهیم. بعد، از این جواب‌ها استفاده می‌کنیم تا به جواب سؤال اصلی نزدیک شویم!

ایمان: من که این کار را خیلی دوست

دارم! اینکه تلاش کنیم تا گام به گام

جواب یک سؤال را پیدا کنیم!

امید: من دیروز در مورد

سؤال اول کمی فکر

کردم، ولی به جوابی

نرسیدم. حرف‌های

صبحان درباره تاس

سالم را یادت هست؟

بدون اینکه تاس را

بارها پرتاب کنیم هم

می‌دانیم که وقتی یک

بار تاس می‌ریزیم، شش

اتفاق متفاوت ممکن است

رخ دهد: یک بیاید، دو

۱. نتیجه پرتاب‌های زنگ تفریح اول و دوم روی هم تقریباً چه بوده است؟

۲. نسبت تعداد دفعاتی که در زنگ تفریح اول گلوله‌های ناهم‌رنگ خارج شده‌اند، به تعداد بازی‌هایی که در آن زنگ انجام شده‌اند، چه قدر است؟

۳. آیا این نسبت برای زنگ‌های تفریح متفاوت یکسان بوده است؟

زنگ ناهار

وقت آن بود که بچه‌ها کارهایشان را جمع‌بندی کنند. آن‌ها در مجموع ۳۴۵ بار بازی کرده بودند. ۱۳۹ بار آن، گلوله‌ها هم‌رنگ و ۲۰۶ بار آن، گلوله‌ها ناهم‌رنگ بودند. پس تعداد دفعاتی که گلوله‌های ناهم‌رنگ بیرون آمده بودند، بیشتر بود. به نظر می‌رسید در این بازی شانس بیرون آوردن گلوله‌های ناهم‌رنگ بیشتر است. برای همین هم امید و ایمان هر دو می‌خواستند وقتی امتیاز بگیرند که گلوله‌ها ناهم‌رنگ هستند. امید گفت: «این نتیجه برعکس نتیجه دو دفعه‌ای است که صبح در حیاط بازی کردیم!»

ایمان جواب داد: «بله ولی هنوز هم باید

حواسمان باشد. حتی وقتی بازی را

بارها و بارها تکرار می‌کنیم،

باز هم ممکن است به

جواب درست نرسیم.

مثلاً ممکن بود

در تمام دفعاتی

که گلوله خارج

کردیم، گلوله‌ها

هم‌رنگ باشند.

البته تعداد

تکرارهایمان

به نسبت زیاد

بوده است. برای

همین فکر می‌کنم

می‌توانیم با اطمینان

زیادی بگوییم که شانس

بیرون آوردن گلوله‌های

ناهم‌رنگ در این بازی بیشتر

است!»

و امید ادامه داد: «اما نمی‌توانیم

صد در صد مطمئن باشیم.»

حالا ببینیم که آن‌ها می‌خواستند





امید: به نظرم کلید باید تغییر کند. چون ما نمی‌خواهیم روشی داشته باشیم که فقط با یک کلید خاص امتیاز بالایی می‌آورد. من می‌خواهم روشی پیدا کنم که اگر یک بار دیگر هم اسیر قبیله آدم‌خوار شدم، بتوانم نجات پیدا کنم!

ایمان: موافقم! ولی این طوری که کار خیلی سخت می‌شود! هر دفعه ابتدا باید چهل بار تاس ریخته شود تا کلید امتحان مشخص شود. بعد هم یک پاسخ‌نامه پر کنیم و تعداد جواب‌های درست را بشماریم!

امید: نمی‌دانم آقای احمدی چه‌طور می‌خواهد این همه کار را انجام دهد تا روش خوب را به ما معرفی کند!

باز هم بچه‌ها به خانه امید رسیده بودند و

باید خداحافظی می‌کردند. امید

با شیطنت به ایمان گفت:

«راستش را بگو ایمان!

تو دیروز هم چیزهایی

می‌گفتی که به

تکرار کردن ربط

داشت! همان

موقع هم شک

داشتم که شاید

جواب را می‌دانی!

از اول هم

می‌دانستی معنی

روش خوب چیست؟»

ایمان خندید و گفت:

«نه، نمی‌دانستم. اما در چند

شماره^۱ از مجله برهان ریاضی

چیزهایی درباره شانس و احتمال خوانده

بودم که به این مسائل مربوط بود. دیروز فقط به خاطر ارتباطی

که حس می‌کردم، از تکرار کردن حرف زدم. صحبت‌های

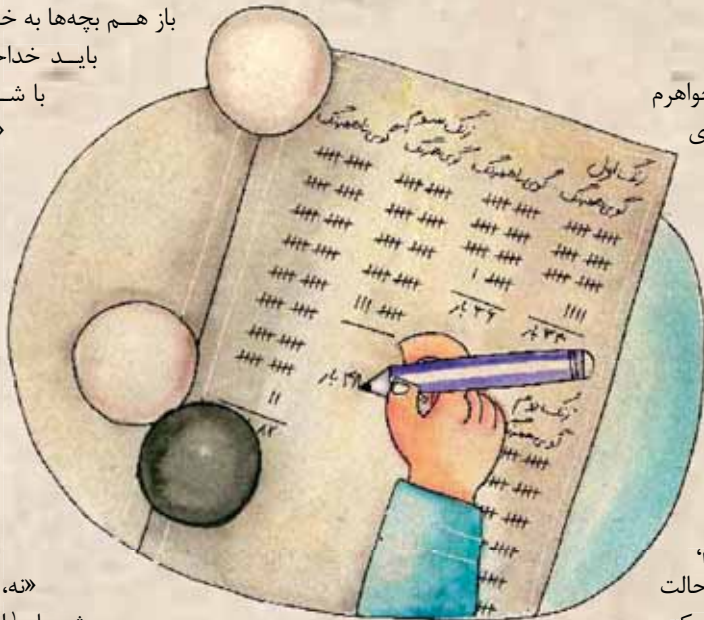
امروزمان باعث شد مطالبی که قبلاً خوانده بودم را هم بهتر

بفهمم.»

پی‌نوشت‌ها

۱. شما هم اگر دوست دارید درباره شانس و احتمال بیشتر بدانید، می‌توانید نگاهی به شماره‌های ۶۷، ۶۸، ۶۹ و ۷۰ برهان ریاضی دوره متوسطه اول ببندازید. از طریق وب‌گاه مجلات رشد می‌توانید به این شماره‌ها دسترسی داشته باشید.

۲. از خانم مونا آزادکیا برای همکاری در نوشتن این مطلب، سپاسگزاریم.



بیاید، سه بیاید و... اگر تاس سالم باشد، این حالت‌ها هم‌شانس هستند. یعنی چون تاس خیلی متقارن است، هیچ دلیلی وجود ندارد که بگوییم یکی از این شش حالت با بقیه فرق دارد. در بازی گلوله‌ها هم وقتی دو گلوله خارج می‌کنیم، اتفاق‌های متفاوتی می‌تواند پیش بیاید. فکر می‌کنم خوب است همه این اتفاق‌ها را مشخص کنیم. بعد ببینیم تعداد اتفاق‌های مربوط به درآمدن گلوله‌های هم‌رنگ بیشتر است یا اتفاق‌های مربوط به درآمدن گلوله‌های ناهم‌رنگ.

ایمان: چه ایده خوبی! من هم به این مسئله فکر می‌کنم. اما مسئله آقای احمدی را باید زودتر حل کنیم.

در راه خانه

امید: به نظر تو چرا خواهم

فکر کردن به بازی

گلوله‌ها را به ما

پیشنهاد کرده

است؟

ایمان: کاری

که امروز کردیم

چه بود؟ یک

بازی شانس

داشتیم و

نمی‌دانستیم برای

اینکه در آن، نتیجه

بهتری به دست بیاوریم،

باید کدام‌یک از دو حالت

امتیاز گرفتن را انتخاب کنیم.

امید: و برای اینکه بفهمیم راه خوب

چیست، دفعات زیادی بازی را تکرار کردیم. بعد، آن وضعیتی

که بیشتر پیش آمده بود را به عنوان راه خوب انتخاب کردیم.

ایمان: پر کردن پاسخ‌نامه هم شبیه یک بازی شانس است. هم

جای جواب‌های درست با ریختن تاس معلوم شده است و هم

اینکه ما اصلاً از سؤال‌ها سر در نمی‌آوریم.

امید: پس روش خوب روشی است که باعث می‌شود، اگر

دفعات زیادی در آزمون قبیله آدم‌خوار شرکت کنیم، در کل

امتیاز زیادی بگیریم. یعنی راه دیگری نباشد که از روش ما

بیشتر امتیاز بگیرد.

ایمان: به نظرم جواب خوبی برای آقای احمدی پیدا کرده‌ایم!

فقط یک سؤال دارم. هر بار که ما می‌خواهیم پاسخ‌نامه را پر

کنیم، قبیله باید یک کلید جدید طراحی کند؟ یا ابتدای کار

یک کلید توسط ریاضی‌دان قبیله طراحی می‌شود و هر بار

که ما پاسخ‌نامه را پر می‌کنیم، با همان کلید تعداد جواب‌های

درست ما معلوم می‌شود؟

هر دو لحظاتی فکر کردند و بعد بحثشان را ادامه دادند: